Euklidovský priestor $\boldsymbol{E}_n$

Každdú usporiadanú n-ticu reálnych čísel, $n \geq 1$

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

nazývame bod n-rozmerného priestoru.
Čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazývame súradnice bodu.
Nech $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ sú dva ľubovoľné body n-rozmerného priestoru.
Vzdialonsť bodov X, Y je číslo

$$d(X,Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}$$

Množina všetkých bodov n-rozmerného priestoru s definovanou vzdialenosťou jej ľubovoľných bodov sa nazýva
***n*-rozmerný Euklidovský priestor - E_n**

Pre ľubovoľné tri body $X, Y, Z \in \boldsymbol{E}_n$ platí:

1. $\boldsymbol{d(X, Y) \geq 0,\ d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y}$

2. $\boldsymbol{d(X, Y) = d(Y, X)}$

3. $\boldsymbol{d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)}$

Funkcia d: $\boldsymbol{E}_n \times \boldsymbol{E}_n \to \boldsymbol{R}$ sa nazýva **metrika** priestoru $\boldsymbol{E}_n$,

dvojica $(\boldsymbol{E}_n, d)$ sa nazýva **metrický priestor**.

Majme bod $X_0 \in \boldsymbol{E}_n$ a reálne číslo $\varepsilon > 0$.
Množina

$$O_\varepsilon(X_0) = \{ X \in \boldsymbol{E}_n\colon d(X, X_0) < \varepsilon \}$$

sa nazýva ε-ové okolie bodu X_0.

Nech je množina $M \subset \boldsymbol{E}_n$. Bod $X_0 \in M$ sa nazýva **vnútorný bod** množiny M, ak existuje také ε-ové okolie bodu X_0, ktoré je podmnožinou M

$$\exists\ \varepsilon > 0,\ O_\varepsilon(X_0) \subset M$$

Množina všetkých vnútorných bodov množiny M sa nazýva **vnútro** množiny M.
Množina M sa nazýva **otvorená**, ak každý jej bod je jej vnútorným bodom.

Bod sa nazýva **hraničný bod** množiny $M \subset \boldsymbol{E}_n$, ak každé jeho ε-ové okolie obsahuje aspoň jeden bod množiny M a aspoň jeden bod, ktorý do množiny M nepatrí.

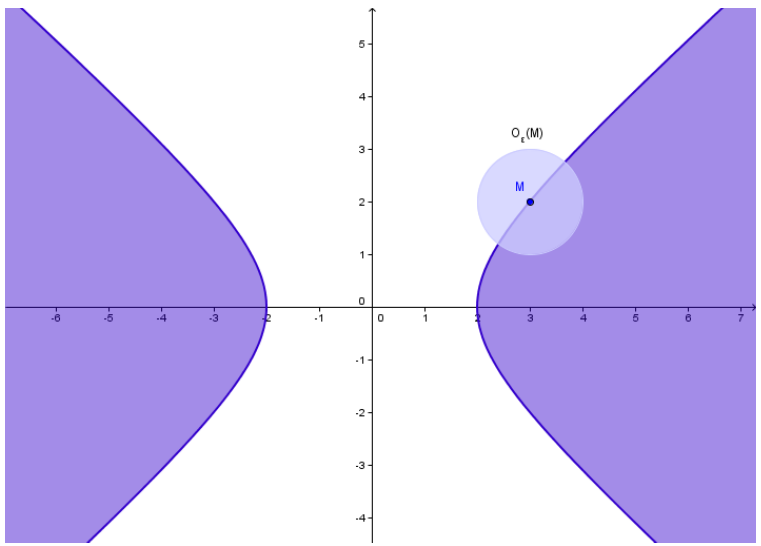
Množina všetkých hraničných bodov množiny M sa nazýva **hranica** množiny M.
Ak k množine M pridáme všetky jej hraničné body, dostaneme množinu, ktorá sa nazýva **uzáver** množiny M.

Množina M sa nazýva **uzavretá**, ak obsahuje všetky svoje hraničné body (je totožná so svojim uzáverom).

Hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a \neq 0, b \neq 0$ je hranica množiny

$$M = \{X \in E_2; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq 1, a \neq 0, b \neq 0\},$$

všetky vnútorné body hyperboly sú vnútornými bodmi množiny M, ktorá je uzavretá.

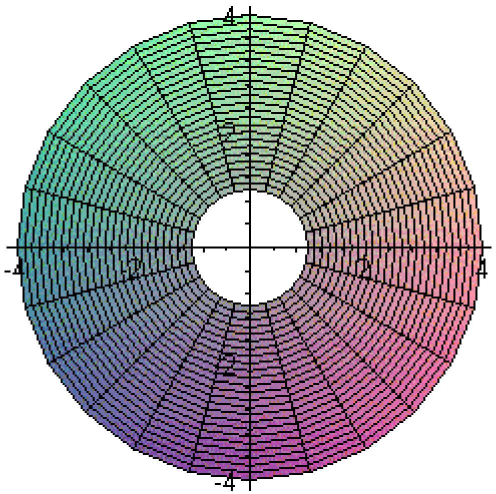


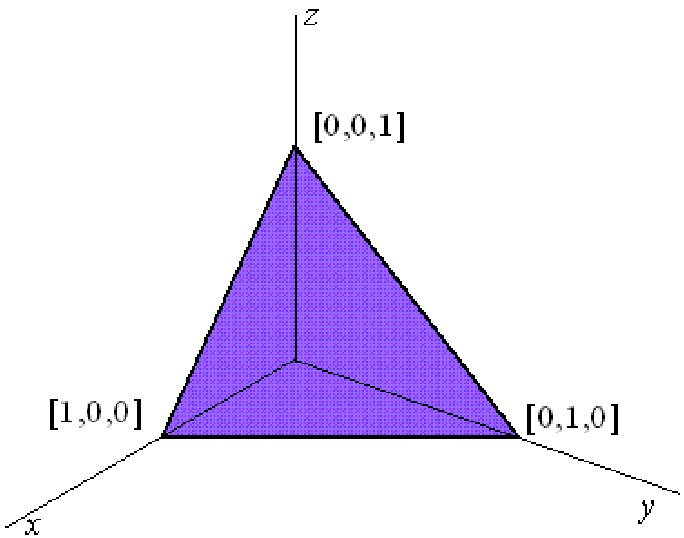
Množina M sa nazýva **súvislá**, ak jej ľubovoľné dva body možno spojiť krivkou, ktorá celá leží v množine M.

Každá otvorená a súvislá množina $M \subset \boldsymbol{E}_n$ sa nazýva **oblasť**.

Oblasť $M \subset \boldsymbol{E}_n$ sa nazýva **jednoducho súvislá**, ak každá ohraničená oblasť, ktorej hranicou je jednoduchá uzavretá krivka $k \subset M$, je jej časťou. Jednoducho súvislá oblasť neobsahuje "diery".

Medzikružie nie je jednoducho súvislá oblasť, trojuholník je jednoducho súvislá oblasť

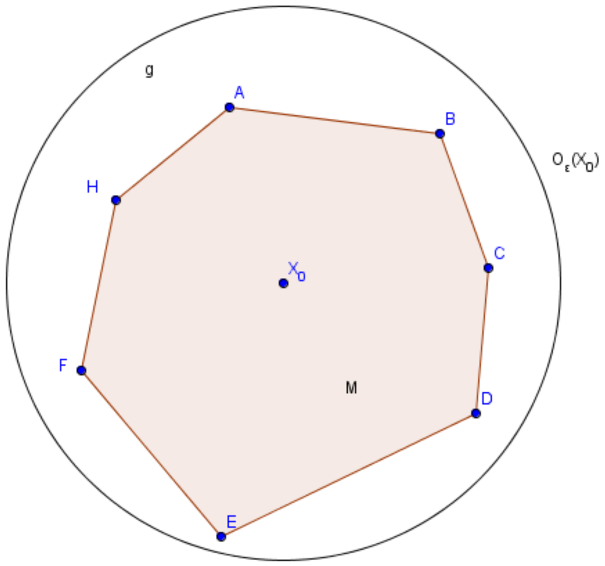


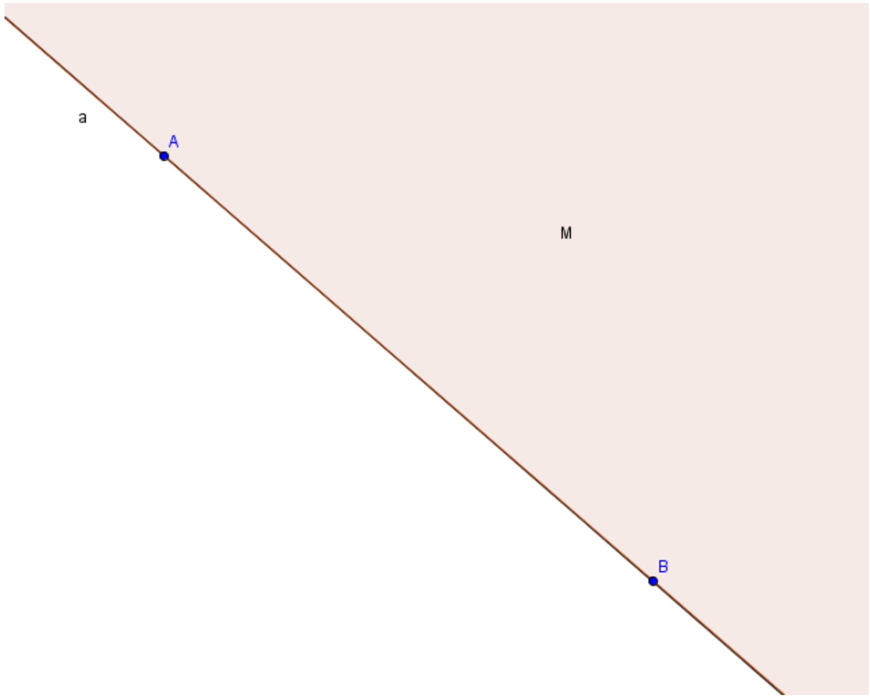


Množina M sa nazýva **ohraničená**, ak existuje reálne číslo $k > 0$ a taký bod $X_0 \in M$, že pre každý bod $X \in M$ platí

$$d(X, X_0) < k.$$

n-uholník je ohraničená množina, polrovina nie je ohraničená množina





Bod sa nazýva **izolovaný bod** množiny $M \subset \boldsymbol{E}_n$, ak jeho ľubovoľné ε-ové okolie neobsahuje žiadny iný bod množiny M.

Bod sa nazýva **hromadný bod** množiny $M \subset \boldsymbol{E}_n$, ak každé jeho ε-ové okolie obsahuje nekonečne veľa bodov množiny M.

Každá ohraničená nekonečná množina $M \subset \boldsymbol{E}_n$ má aspoň jeden hromadný bod. Hromadný bod množiny je buď vnútorný, alebo hraničný bod tejto množiny.

Vnútorný bod množiny je vždy prvkom tejto množiny, vonkajší bod množiny nikdy nie je jej prvkom.

Hraničný bod množiny môže, ale nemusí byť jej prvkom.

Nech je daná neprázdna množina $M \subset \boldsymbol{E}n$ a ľubovoľný bod $X_0 \in \boldsymbol{E}n$. Potom nastane práve jeden z týchto prípadov:

1. Bod X_0 patrí do M spolu s nejakým svojim ε-ovým okolím, existuje $\varepsilon > 0$ také, že $O_\varepsilon(X_0) \subset M$. Bod X_0 je vnútorný bod M.

2. Bod X_0 nepatrí do M a do M nepatrí ani žiadny bod nejakého jeho ε-ového okolia, teda existuje také $\varepsilon > 0$, že $O_\varepsilon(X_0) \cap M = \emptyset$. Bod X_0 je vonkajší bod M.

3. Každé okolie $O_\varepsilon(X_0)$ bodu X_0 obsahuje aspoň jeden bod M a aspoň jeden taký bod, ktorý nepatrí do M. Bod X_0 je hraničný bod M.

4. Existuje také okolie $O_\varepsilon(X_0)$ bodu X_0, že $O_\varepsilon(X_0) \cap M = \{ X_0\}$. Bod X_0 je izolovaný bod M, a je jej hraničným bodom.

5. Každé okolie $O_\varepsilon(X_0)$ bodu X_0 obsahuje nekonečne veľa bodov M . Bod X_0 je hromadný bod M.

Množina bodov priestoru ***E**n*, ktorá je otvorená a súvislá, sa nazýva **oblasť**.

Množina bodov priestoru ***E**n*, ktorá je uzáverom oblasti, sa nazýva **uzavretá oblasť**.

Každú uzavretú oblasť získame tak, že k vhodnej oblasti pridáme všetky jej hraničné body.

Množina *M* je uzavretá práve vtedy, keď obsahuje všetky svoje hromadné body.