LIMITA FUNKCIE

δ-okolím bodu *a* nazývame interval v *R*

$$O_{\partial}(a) = (a - \partial, a + \partial),\ \partial > 0$$

Pravé okolie bodu *a*

$$O_{\partial}^{+}(a) = (a, a + \partial),\ \partial > 0$$

Ľavé okolie bodu *a*

$$O_{\partial}^{-}(a) = (a - \partial, a),\ \partial > 0$$

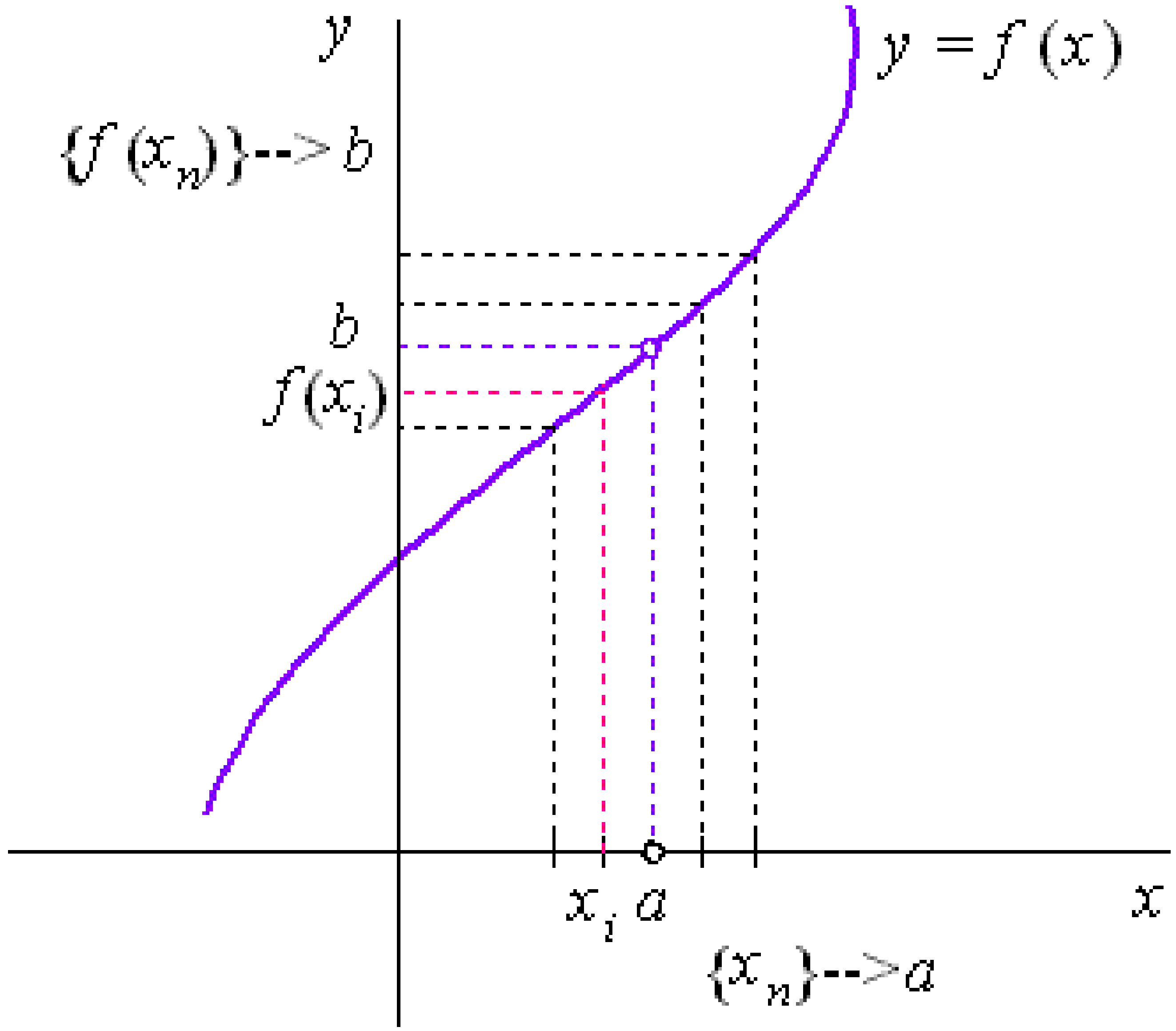
Heineho definícia limity funkcie

Nech je funkcia f definovaná pre všetky $x \neq a$ na nejakom okolí $O_\delta(a)$ bodu a. Hovoríme, že funkcia f má v bode a limitu rovnajúcu sa číslu b, ak pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

má postupnosť funkčných hodnôt $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ limitu rovnajúcu sa číslu b, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow$$

$$(\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in D(f), x_n \neq a, \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b)$$



y
$y = f(x)$
$\{f(x_n)\}$--> b
b
$f(x_i)$
x_i
a
x
$\{x_n\}$--> a

Z definície limity vyplýva, že $\lim_{x \to a} f(x) = b$

neexistuje, ak sa podarí nájsť dve také postupnosti,

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$

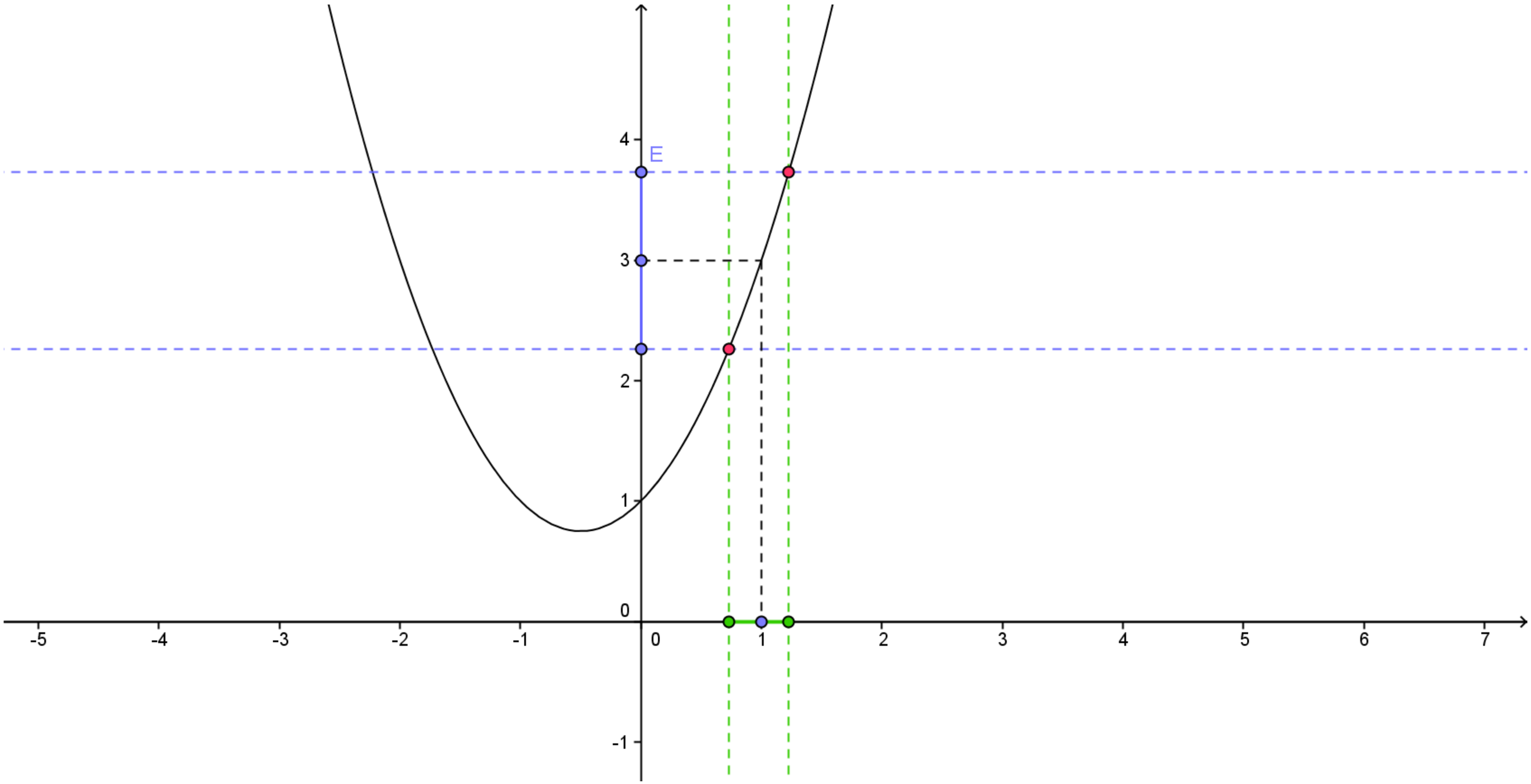
pre ktoré

$$x_n, x'_n \in D(f), x_n \neq a, x'_n \neq a, \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} x'_n = a$$

a

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(x'_n)$$

$$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}, \textit{neexistuje} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$$



Cauchyho definícia limity

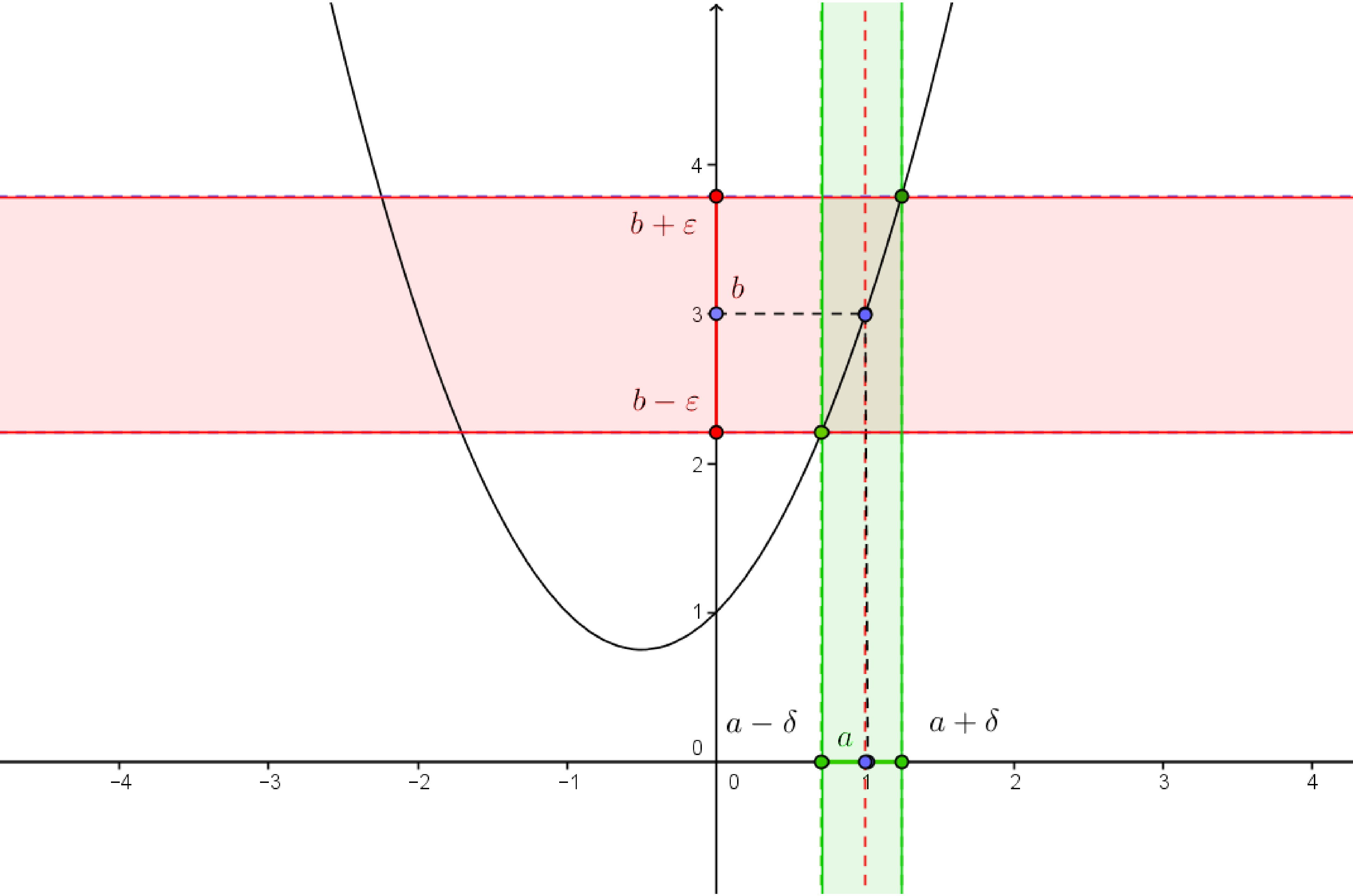
Nech je funkcia *f* definovaná pre všetky x $\neq$ *a* na nejakom okolí $O_\delta(a)$ bodu *a*. Hovoríme, že funkcia *f* má v bode *a* limitu rovnajúcu sa číslu *b*, ak pre každé kladné číslo $\varepsilon > 0$ existuje také kladné číslo $\delta > 0$, že pre každé $x \in O_\delta(a)$, $x \neq a$ je $f(x) \in O_\varepsilon(b)$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow$$

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \partial > 0, \forall x \in O_\partial(a), x \neq a \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(b))$$

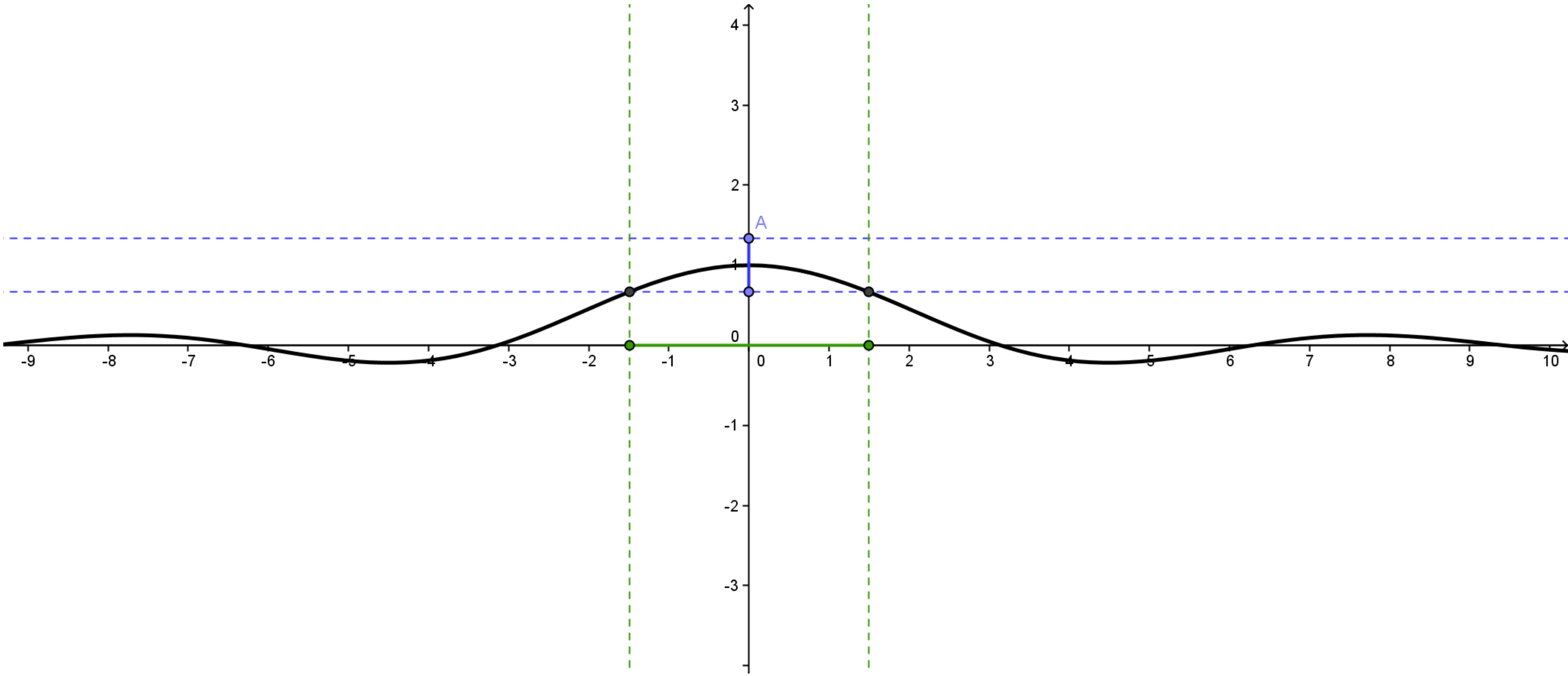
$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow$$

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \partial > 0, 0 < |x - a| < \partial \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$



$b+\varepsilon$
b
$b-\varepsilon$
$a-\delta$
a
$a+\delta$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$



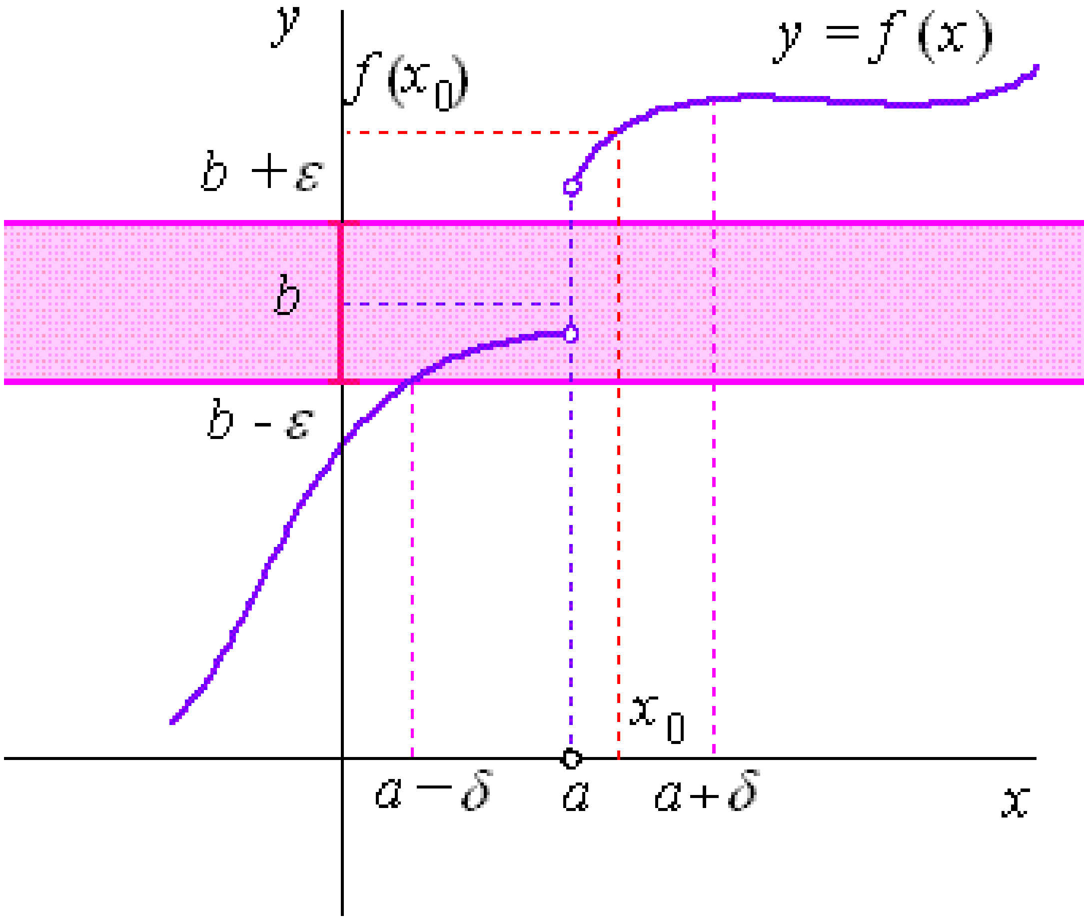
Funkcia nemá v bode *a* limitu rovnajúcu sa číslu *b*, ak pre nejaké (aspoň jedno) ε-okolie čísla *b*,

$O_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$

δ-okolie bodu *a*,

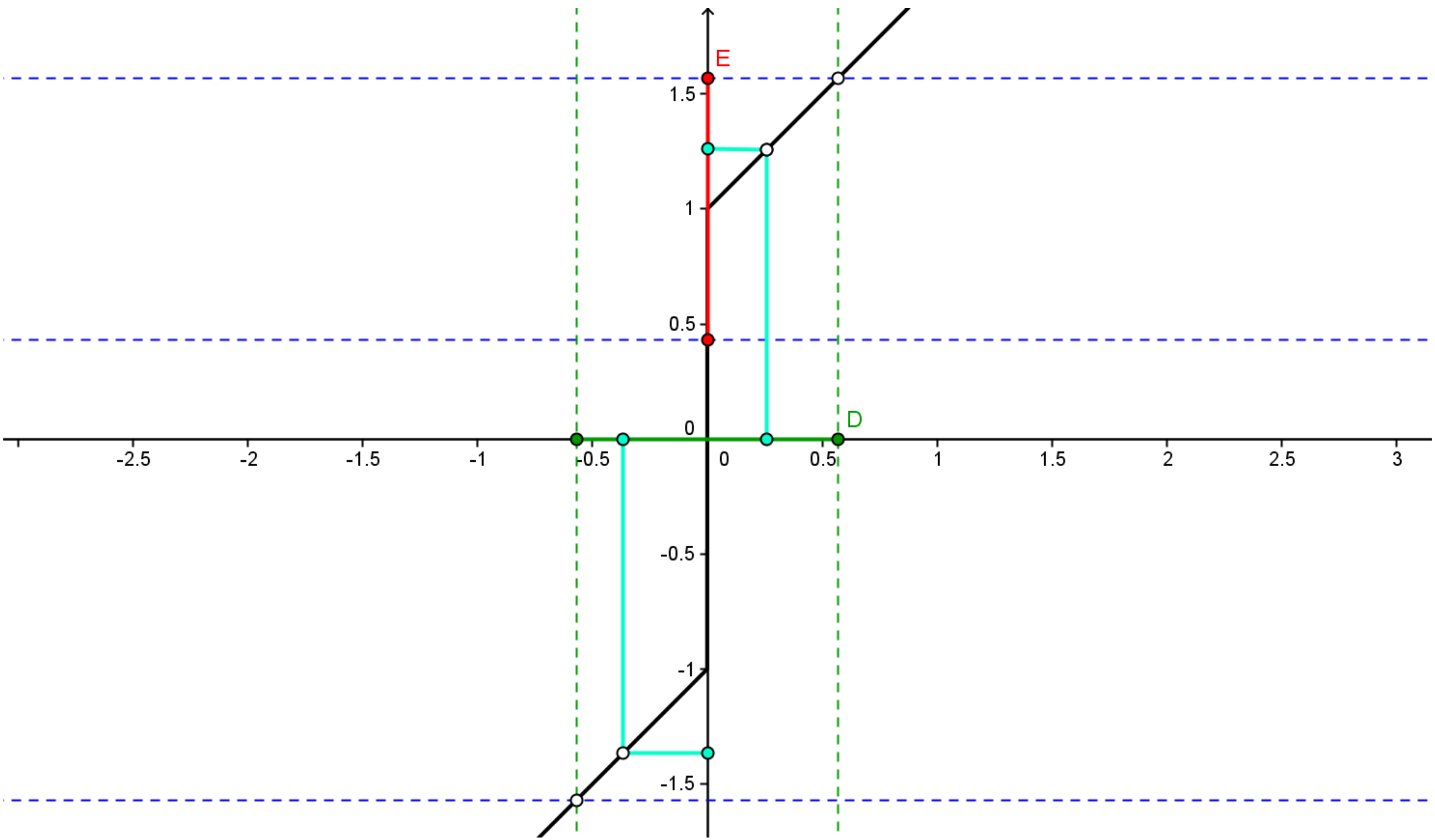
$O_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$

z definície neexistuje.



$$\lim_{x\to 0}[\operatorname{sgn}(x)+x]\ \mathit{neexistuje}$$

$$\lim_{x\to 0^+}[\operatorname{sgn}(x)+x]=1,\ \lim_{x\to 0^-}[\operatorname{sgn}(x)+x]=-1$$



Limita funkcie zľava – Heineho definícia

Nech je funkcia *f* definovaná pre všetky $x \neq a$ na nejakom ľavom okolí $O^{-}_{\delta}(a)$ bodu *a*.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b \Leftrightarrow$$

$$(\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n < a, \lim_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = b)$$

Hovoríme, že funkcia *f* má v bode *a* limitu zľava rovnajúcu sa číslu *b* .

Limita funkcie sprava – Cauchyho definícia

Nech je funkcia *f* definovaná pre všetky $x \neq a$ na nejakom pravom okolí $O^{+}_{\delta}(a)$ bodu *a*.

$$\lim_{x \to a^{+}} f(x) = b \Leftrightarrow$$

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \partial > 0, \forall x \in O_{\partial}^{+}(a) \Rightarrow f(x) \in O_{\varepsilon}(b))$$

Hovoríme, že funkcia *f* má v bode *a* limitu sprava rovnajúcu sa číslu *b* .

Limita funkcie *f* v bode *a* existuje práve vtedy, ak existuje v bode *a* limita sprava aj limita zľava a tieto sa rovnajú.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^{+}} f(x) = \lim_{x\to a^{-}} f(x)$$

Základné vlastnosti limity funkcie

1. Funkcia môže mať v bode *a* len jednu limitu.
2. Ak má funkcia *f* v bode *a* limitu, potom existuje také okolie bodu *a*, na ktorom je funkcia *f* ohraničená.
3. Ak $f(x) = c$, $c \in R$, tak

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \ \forall a \in R$$

4. Ak $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A, \lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, potom

a) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=A\pm B$

b) $\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)=A.B$

c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{A}{B},$

$B\neq 0, \exists\partial>0, \forall x\in O_\partial(a), x\neq a, g(x)\neq 0$

d) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=(\lim\limits_{x\to a} f(x))^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=A^B$

ak $\exists\partial>0, \forall x\in O_\partial(a), x\neq a$ majú výrazy

$(f(x))^{g(x)}$ a A^B zmysel

5. Limita troch funkcií, Ak

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b \text{ a ak } \exists \partial > 0, \forall x \in O_\partial(a), x \neq a$$

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \text{potom} \lim_{x\to a} g(x) = b$$

6. Ak na nejakom okolí $O_\delta(a)$ bodu a platí

$$f(x) = g(x)\ \forall x \neq a \text{ a } \lim_{x\to a} g(x) = b,$$

potom aj $\lim_{x\to a} f(x) = b$

Poznámka: Vlastnosti 1) – 6) platia aj pre jednostranné limity.

Nevlastná limita funkcie v bode *a*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow$$

$$(\forall K \in R, \exists \partial > 0, \forall x \in O_{\partial}(a), x \neq a \Rightarrow f(x) > K)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

$$(\forall K \in R, \exists \partial > 0, \forall x \in O_{\partial}(a), x \neq a \Rightarrow f(x) < K)$$

Ďalšie vlastnosti limity funkcie v bode *a*

7. Ak $\lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{x\to a} g(x) = 0,$

$$\exists \partial > 0, \forall x \in O_{\partial}(a), x \neq a$$

platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \text{potom} \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0, \text{potom} \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

8. Ak je funkcia f v nejakom okolí $O_\delta(a)$ bodu a ohraničená a platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, potom

a) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \pm\infty$

b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Limita a nevlastná limita funkcie

v nevlastných bodoch

Nech je funkcia *f* definovaná na intervale (a, ∞).

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \Leftrightarrow$$

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists A \in R : x > A \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(b))$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow$$

$$(\forall K \in R, \exists A \in R : x > A \Rightarrow f(x) > K)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

$$(\forall K \in R, \exists A \in R : x > A \Rightarrow f(x) < K)$$

Nech je funkcia *f* definovaná na intervale (-∞, *a*).

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow$$

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists A \in R : x < A \Rightarrow f(x) \in O_{\varepsilon}(b))$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow$$

$$(\forall K \in R, \exists A \in R : x < A \Rightarrow f(x) > K)$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

$$(\forall K \in R, \exists A \in R : x < A \Rightarrow f(x) < K)$$