Fourierove rady

Funkcionálny rad tvaru

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

nazývame trigonometrický rad s periódou 2π.
Čísla a_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n, ... sa nazývajú koeficienty tohto radu.
Ak rad konverguje na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ a platí

$$s(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{i=1}^{n}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

Funkcia s je tiež periodická s periódou 2π, ako súčet nekonečne veľa periodických funkcií s periódou 2π.

- ak $a_n = 0$, $\forall\, n = 0, 1, 2, ...$, rad sa nazýva sínusový, funkcia s je nepárna,
- ak $b_n = 0$, $\forall\, n = 1, 2, ...$, rad sa nazýva kosínusový, funkcia s je párna.

Nech f je periodická funkcia s periódou 2 π, a nech pre koeficienty a_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n trigonometrického radu platí

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, n = 1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, n = 1,2,...$$

Potom trigonometrický rad s danými koeficientami, ktoré sa nazývajú Fourierove koeficienty, sa nazýva Fourierov rad funkcie f.

Ak k funkcii f zostrojíme Fourierov rad, za akých podmienok bude tento konvergovať k funkcii f?

Kedy existuje rozvoj funkcie f do Fourierov radu?

Funkcia f sa nazýva po častiach monotónna na intervale $\langle a, b \rangle$, ak tento interval možno rozložiť na konečný počet podintervalov takých, že na každom z nich je funkcia f monotónna.

Ak je funkcia na istom intervale po častiach monotónna a ohraničená, potom môže mať na danom intervale iba body nespojitosti prvého druhu.

V týchto bodoch teda existujú jednostranné limity funkcie.

Ak je funkcia navyše periodická a jej priebeh sa na danom intervale opakuje, predchádzajúca vlastnosť platí na celom definičnom obore.

Postačujúca podmienka rozvoja funkcie do Fourierovho radu

Ak je periodická funkcia f s periódou 2π po častiach monotónna a ohraničená na intervale $\langle -\pi, \pi\rangle$, potom Fourierov rad funkcie f konverguje k tejto funkcii v každom bode spojitosti a v bode nespojitosti konverguje k aritmetickému priemeru jednostranných limít v tomto bode.

Ak teda na intervale $\langle -\pi, \pi\rangle$ platí

$$s(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{i=1}^{n}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

potom pre ľubovoľné reálne číslo x_0 platí

$$s(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) + \lim_{x \to x_0^-} f(x)\right)$$

Ak je f v bode x_0 spojitá, platí $s(x_0) = f(x_0)$.

Dôsledok

Fourierov rad periodickej funkcie s periódou 2π, ktorá je spojitá, konverguje k tejto funkcii na intervale $(-\infty, \infty)$.

Ak na nejakej množine reálnych čísel Fourierov rad danej funkcie konverguje k tejto funkcii, hovoríme, že sa funkcia dá rozvinúť do Fourierovho radu na tejto množine, a tento rad je rozvojom danej funkcie do Fourierovho radu.

Fourierove rady párnych a nepárnych funkcií

Ak je periodická funkcia *f* s periódou 2π párna, potom platí

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, n = 1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0, n = 1,2,\ldots$$

Fourierov rad obsahuje iba párne funkcie, nazýva sa kosínusový rad a jeho tvar je

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Ak je periodická funkcia *f* s periódou 2π nepárna, potom platí

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0, n = 1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, n = 1,2,\ldots$$

Fourierov rad obsahuje iba nepárne funkcie, nazýva sa sínusový rad a jeho tvar je

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin x$$

Fourierove rady funkcií so všeobecnou periódou

Nech je periodická funkcia f s periódou $T = 2l$ po častiach monotónna a ohraničená na na intervale $\langle -l, l \rangle$. Potom jej Fourierov rad konverguje k funkcii f v každom bode spojitosti a v bode nespojitosti konverguje k aritmetického priemeru jednostranných limít v tomto bode.
Fourierov rad má tvar

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

a pre Fourierove koeficienty platí

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, n = 1,2,\ldots, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, n = 1,2,\ldots$$

Pre funkciu f s periódou $2l$ platí,

Fourierov rad párnej funkcie f je kosínusový

Fourierov rad nepárnej funkcie f je sínusový.